

### Capítulo 3

### Solución de Problemas con Condiciones de Frontera:

#### 3.1 Introducción:

Sí:  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{J}_M = 0$  y  $\mathbf{r}_M = 0$

Entonces:  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

De la relación constitutiva:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 [\nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}] = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J}_M = 0 \quad \therefore \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \dots (i)$$

También:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 [\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M}] = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} - \mathbf{r}_M = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \dots (ii)$$

Por (i):  $\mathbf{H} = -\nabla V_m$ , en (ii):

$$\nabla^2 V_m = 0 \quad \text{Ecuación de LaPlace.} \quad (3.1)$$

Para resolver un problema magnetostático se debe encontrar la solución de la ec. (3.1), que cumpla las condiciones de frontera, es decir, el comportamiento de los vectores de campo en la(s) frontera(s) de la región considerada. Expresando la ec. (3.1) en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)b$$

Las soluciones físicamente correctas para la ec. (3.1)b se denominan "funciones armónicas", también es posible la solución en coordenadas cilíndricas o esféricas.

#### 3.2 Comportamiento de los vectores del campo magnético en una frontera:

En el caso concreto del campo magnético se debe especificar el comportamiento de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  para garantizar la unicidad de la solución de la ec. (3.1)

##### 3.2.1 Intensidad de campo $\mathbf{H}$ :

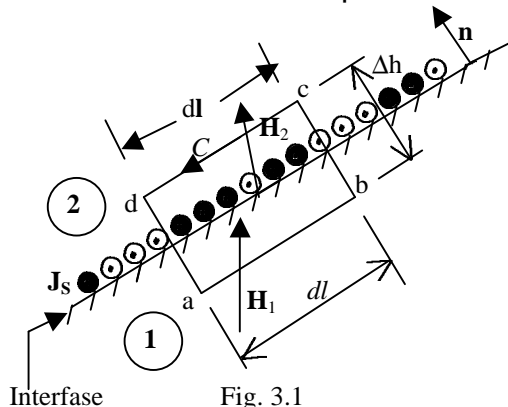


Fig. 3.1

Se trata de aplicar la ley circuital de Ampere al contorno ABCDA infinitesimal:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S}$$

Sí  $\Delta h \rightarrow 0$ , Entonces:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \approx (H_{2t} - H_{1t}) dl$$

De donde resulta:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{n} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (3.3)$$

Una consecuencia importante: La componente tangencial (Paralela a la interfase) de  $\mathbf{H}$  es continua en la frontera entre 2 medios materiales si en dicha frontera no existe corriente eléctrica superficial.

##### 3.2.2 Inducción de campo $\mathbf{B}$ :

Se trata de aplicar la ley de Gauss para  $\mathbf{B}$  al volumen infinitesimal:

$$\oint_{S_{total}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{sí } \Delta h \rightarrow 0, \text{ entonces:}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx (\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{valores en la frontera}$$

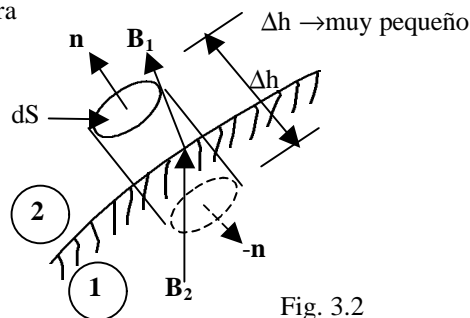


Fig. 3.2

De donde resulta:

$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n} \quad (3.4)a$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.4)b$$

$\therefore$  La componente normal (Perpendicular a la interfase) de  $\mathbf{B}$  es siempre continua en la frontera entre dos medios materiales.

#### 3.3 Problemas de contorno en coordenadas cartesianas:

Las interfaces o fronteras son superficies planas. Resolveremos problemas en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} = 0 \quad (3.5)$$

Pero  $V_m$  es función armónica, teniendo como propiedad el poder expresarse como producto de funciones de una sola variable, es decir:

$$V_{m(x,y)} = f_{(x)} g_{(y)} \quad (3.6)a$$

Reemplazando (3.6)a en (3.5):

$$g \frac{d^2 f}{dx^2} + f \frac{d^2 g}{dy^2} = 0$$

dividiendo:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = 0$$

Se deduce que esta ecuación solo es posible si cada término es igual a una constante (real), esto es:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = k^2 \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - k^2 f = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -k^2 \quad \frac{d^2 g}{dy^2} + k^2 g = 0$$

Se conoce la solución:

$$f_{(x)} = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}, \quad g_{(y)} = D_1 e^{-jky} + D_2 e^{jky}$$

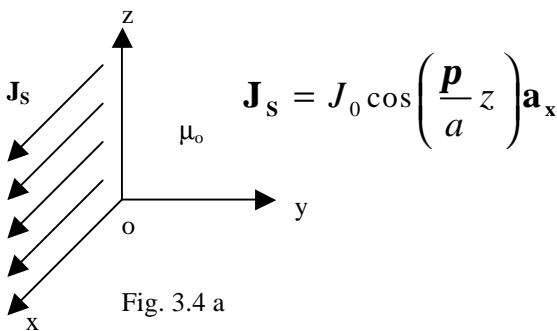
o en su forma usual:

$$\left. \begin{aligned} f_{(x)} &= A_1 \sinh(kx) + A_2 \cosh(kx) \\ g_{(y)} &= B_1 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky) \end{aligned} \right\} \quad (3.6b)$$

Nota: Es posible también el uso del Potencial Vectorial.

### Ejemplo 3.3.1:

En el plano xz existe una densidad superficial de corriente eléctrica  $\mathbf{J}_s$ . Hallar  $\mathbf{H}$  en todo el espacio.



Solución: Usaremos el potencial vectorial  $\mathbf{A}$ ; por la naturaleza de  $\mathbf{J}_s$ :  $\mathbf{A} = A_{(y,z)} \mathbf{a}_x$ , Luego:  $\nabla^2 A = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad \text{y como } A = f_{(y)} g_{(z)}, \text{ tenemos:}$$

$$g f'' + f g'' = 0 \quad \dots \dots \dots \langle \mathbf{a} \rangle$$

Para aplicar condiciones de contorno en el plano xz se debe calcular  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{m_0} = \frac{1}{m_0} (f g' \mathbf{a}_y - g f' \mathbf{a}_z)$$

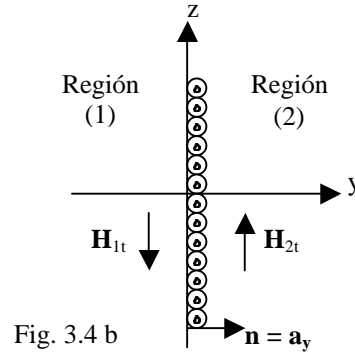


Fig. 3.4 b

Carácter antisimétrico de la componente de  $\mathbf{H}$  paralela al plano de corriente:  $\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \Big|_{y=0}$

Usando (3.3)b:  $\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{n} \Big|_{y=0}$

Para la región (1)  $-2\mathbf{H}_{1t} = +J_0 \cos\left(\frac{\mathbf{p}z}{a}\right) \mathbf{a}_z$

$$\frac{2g f'_{(0)}}{m_0} = J_0 \cos\left(\frac{\mathbf{p}z}{a}\right)$$

Para la región (2):

$$\frac{2g f'_{(0)}}{m_0} = -J_0 \cos\left(\frac{\mathbf{p}z}{a}\right)$$

En conclusión:

$$f'_{(0)} = \begin{cases} -m_0 \frac{J_0}{2} & y > 0 \\ m_0 \frac{J_0}{2} & y < 0 \end{cases} \quad g_{(z)} = \cos\left(\frac{\mathbf{p}z}{a}\right) \dots \langle \mathbf{b} \rangle$$

$\langle \beta \rangle$  en  $\langle \alpha \rangle$ :

$$f'' - \left(\frac{\mathbf{p}}{a}\right)^2 f = 0 \quad \rightarrow \quad f_{(y)} = C_1 e^{\frac{\mathbf{p}y}{a}} + C_2 e^{-\frac{\mathbf{p}y}{a}}$$

para  $y < 0$ ,  $f'_{(0)} = \frac{m_0 J_0}{2}$  y  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f_{(y)} = 0$

entonces:  $f_{(y)} = \frac{m_0 J_0 a}{2\mathbf{p}} e^{\frac{\mathbf{p}y}{a}}$

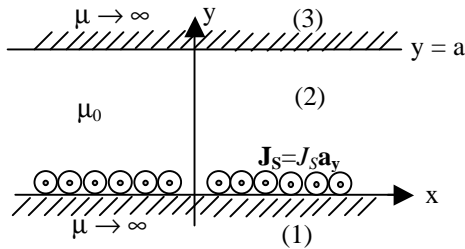
para  $y > 0$ ,  $f'_{(0)} = -\frac{m_0 J_0}{2}$  y  $\lim_{y \rightarrow \infty} f_{(y)} = 0$

entonces:  $f_{(y)} = \frac{m_0 J_0 a}{2\mathbf{p}} e^{-\frac{\mathbf{p}y}{a}}$

Ejercicio: Graficar  $|\mathbf{H}|$  vs  $y$ .

### Ejemplo 3.3.2:

La figura es un modelo del entrehierro en una máquina eléctrica, el devanado rotórico puede imaginarse como una densidad superficial de corriente  $\mathbf{J}_s$ . Hallar  $\mathbf{B}$  en el entrehierro.



$$\mathbf{J}_s = J_0 \sin\left(\frac{px}{b}\right) \mathbf{a}_y$$

Solución:

$$\nabla^2 V_m = 0 \rightarrow V_m = V_{m(x,y)} = f(x)g(y)$$

$$g'' f + g f'' = 0 \dots \dots (i)$$

como  $\mu \rightarrow \infty$  en rotor y estator:  $\Rightarrow \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_3 = 0$

$$y: \mathbf{H}_2 = -\nabla V_m = -(f' g \mathbf{a}_x + f g' \mathbf{a}_y)$$

condiciones de contorno en  $y = 0$ :

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{n} \Big|_{y=0} \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_{2t} = -J_0 \sin\left(\frac{px}{b}\right) \mathbf{a}_x = -f'(x) g(0) \mathbf{a}_x \dots (ii)$$

condiciones de contorno en  $y = a$ :

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = 0 \Big|_{y=a} \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_{2t} = 0 = -f'(x) g(a) \mathbf{a}_x \dots \dots \dots (iii)$$

De (ii):  $f'(x) = \sin\left(\frac{px}{b}\right) \quad g(0) = J_0$

De (iii):  $g(a) = 0$

Luego:  $f(x) = -\frac{b}{p} \cos\left(\frac{px}{b}\right)$

En (i):  $\frac{d^2 g}{dy^2} \left[-\frac{b}{p} \cos\left(\frac{px}{b}\right)\right] + \frac{b}{p} \cos\left(\frac{px}{b}\right) g = 0$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} - \left(\frac{p}{b}\right)^2 g = 0 \rightarrow g = C_1 e^{-\frac{p}{b}y} + C_2 e^{\frac{p}{b}y}$$

De las condiciones de contorno:  $J_0 = C_1 + C_2$

$$0 = C_1 e^{-\frac{p}{b}a} + C_2 e^{\frac{p}{b}a}, \text{ resolviendo:}$$

$$C_1 = \frac{J_0 e^{\frac{p}{b}a}}{e^{\frac{p}{b}a} - e^{-\frac{p}{b}a}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{J_0 e^{-\frac{p}{b}a}}{e^{\frac{p}{b}a} - e^{-\frac{p}{b}a}}$$

$$g(y) = \frac{J_0}{e^{\frac{p}{b}a} - e^{-\frac{p}{b}a}} \left[ e^{-\frac{p}{b}(y-a)} - e^{\frac{p}{b}(y-a)} \right]$$

$$g(y) = \frac{J_0}{\sinh\left(\frac{pa}{b}\right)} \left\{ -\sinh\left[\frac{p}{b}(y-a)\right] \right\}$$

$$\mathbf{H}_2 = -f' g \mathbf{a}_x - f g' \mathbf{a}_y =$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{J_0}{\sinh\left(\frac{pa}{b}\right)} \left\{ \sin\left(\frac{px}{b}\right) \sinh\left[\frac{p}{b}(y-a)\right] \mathbf{a}_x - \cos\left(\frac{px}{b}\right) \cosh\left[\frac{p}{b}(y-a)\right] \mathbf{a}_y \right\}$$

### 3.4 Problemas de contorno en coordenadas esféricas:

Las interfaces son superficies esféricas, trataremos problemas con simetría azimutal; es decir independientes de  $\phi$ . Escribiendo (3.1) en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \right) = 0 \dots \dots \dots (3.7)$$

Por propiedades de funciones armónicas:

$$V_{m(r,\theta)} = f(r)g(\theta) \quad (3.8)a$$

como en el caso de la sección 3.3 se obtienen dos ecuaciones separadas; para el caso de  $g(\theta)$ , se obtiene la llamada "ecuación de Legendre"; la solución completa es:

$$V_{m(r,\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n r^n + C_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \theta) \quad (3.8)b$$

$P_n(\cos \theta)$  es la notación general para los "Polinomios de Legendre",

$$\begin{cases} P_{0(\cos \theta)} = 1; & P_{1(\cos \theta)} = \cos \theta; \\ P_{2(\cos \theta)} = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1); & \dots \end{cases}$$

cuando se resuelve problemas donde las interfaces son superficies concéntricas ec. (3.8)b, puede simplificarse:

$$V_{m(r,\theta)} = A_0 + C_0 r^{-1} + (A_1 r + C_1 r^{-2}) \cos \theta$$

Pero  $A_0$  es irrelevante (interesa calcular  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ ),  $A_1$  y  $C_0$  corresponden a una carga magnética puntual (que no existe); entonces la solución para este caso es:

$$V_{m(r,\theta)} = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad \dots (3.8)c$$

#### Ejemplo 3.4.1:

Considérese una esfera con magnetización propia uni-

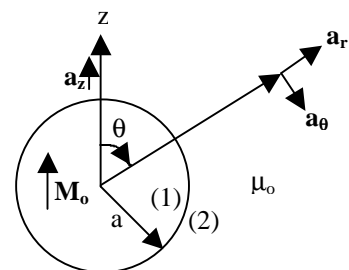


Fig. 3.5 Un imán esférico.

forme y constante, hállese los campos dentro y fuera de ella.

Solución: Para el interior:

$$V_{m(r,\theta)} = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta$$

Para el exterior:  $V_{m_2(r,\theta)} = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta$

Debe tomarse  $C_1 = 0$  y  $A_2 = 0$  para que  $V_{m_1}$  este acotado en  $r = 0$  y  $V_{m_2}$  lo esté en  $r \rightarrow \infty$ .

Por definición:  $\mathbf{H} = -\nabla V_m = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial q} \mathbf{a}_\phi$

Calculando los campos:

$$\mathbf{H}_1 = -A_1 \cos q \mathbf{a}_r + A_1 \sin q \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H}_2 = 2C_2 r^{-3} \cos q \mathbf{a}_r + C_2 r^{-3} \sin q \mathbf{a}_\phi$$

En el exterior  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}$ ; en el interior (magnetización propia) debe usarse la relación constitutiva:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 (\mathbf{H}_1 + M_0 \mathbf{a}_z)$$

Expresando  $M_0$  en coordenadas esféricas:

$$M_0 \mathbf{a}_z = M_0 (\cos q \mathbf{a}_r - \sin q \mathbf{a}_\phi), \text{ así:}$$

$$\mathbf{B}_1 = [(M_0 - A_1) \cos q \mathbf{a}_r + (A_1 - M_0) \sin q \mathbf{a}_\phi]$$

ahora podemos aplicar las condiciones de contorno en

$$r = a : \quad -A_1 + M_0 = 2C_2 a^{-3} \quad \dots\dots (i)$$

$$A_1 = C_2 a^{-3} \quad \dots\dots (ii)$$

Finalmente:

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{M_0}{3} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{M_0}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [2\cos q \mathbf{a}_r + \sin q \mathbf{a}_\phi] \quad \dots (iii)$$

Observaciones:

- a) Comparando (iii) con ec. (1.16)b observamos que el campo es dipolar con  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 M_0$
- b) El campo interior  $H_1$  es opuesto a  $M$ ; por ello se denomina "campo desmagnetizante". El factor 1/3 (que afecta a  $M_0$ ) se denomina "factor desmagnetizante" de la esfera  $N_m$  ( $H_1 = -N_m M$ )

**Ejercicio:** Hallar el factor desmagnetizante de un imán cilíndrico muy largo.

**Ejemplo 3.4.2:**

Hallar el factor de blindaje magnético para la esfera de hierro de la fig. 3.6

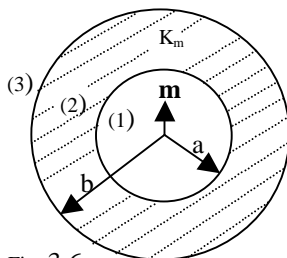


Fig. 3.6

Dipolo Magnético apantallado por una esfera ferromagnética.

**Solución:** Se pide calcular  $h_m = \mathbf{H}_3' / \mathbf{H}_3$ , donde:  $\mathbf{H}_3'$  es el campo sin la esfera y  $\mathbf{H}_3$  es el campo con la esfera.

$$V_{m1} = A_1 r \cos q + C_1 r^{-2} \cos q \quad r < a$$

$C_1 \neq 0$ , porque existe la fuente de campo puntual  $\mathbf{m}$ ,

por consiguiente:  $C_1 = \frac{m_0}{4\pi}$  (ver ec. 1.17)

Para el resto del espacio:

$$V_{m2} = A_2 r \cos q + C_2 r^{-2} \cos q \quad a < r < b$$

$$V_{m3} = C_3 r^{-2} \cos q \quad r > b$$

Observar que:  $\frac{\mathbf{H}'_3}{\mathbf{H}_3} = \frac{(m_0/4\pi)}{C_3}$ , sólo se requiere hallar

$C_3$

Para aplicar las condiciones de contorno, calculamos los campos:

$$(1) \begin{cases} \mathbf{H}_1 = (2C_1 r^{-3} - A_1) \cos q \mathbf{a}_r + (C_1 r^{-3} + A_1) \sin q \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \mathbf{H}_2 = (2C_2 r^{-3} - A_2) \cos q \mathbf{a}_r + (C_2 r^{-3} + A_2) \sin q \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{B}_2 = \mu_0 K_m \mathbf{H}_2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \mathbf{H}_3 = 2C_3 r^{-3} \cos q \mathbf{a}_r + C_3 r^{-3} \sin q \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3 \end{cases}$$

Las condiciones de contorno en  $r = a$  y  $b$ , producen las siguientes ecuaciones:

$$-A_1 + A_2 + a^{-3} C_2 + 0 = \frac{m_0}{4\pi} a^{-3}$$

$$0 + A_2 + b^{-3} C_2 - b^{-3} C_3 = 0$$

$$A_1 - K_m A_2 + 2K_m a^{-3} C_2 + 0 = \frac{m_0}{4\pi} a^{-3}$$

$$0 - K_m A_2 + 2K_m b^{-3} C_2 - 2b^{-3} C_3 = 0$$

El determinante de la matriz de coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & +1 & a^{-3} & 0 \\ 0 & 1 & b^{-3} & -b^{-3} \\ 1 & -K_m & 2K_m a^{-3} & 0 \\ 0 & -K_m & 2K_m b^{-3} & -2b^{-3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a^{-3} b^{-3} (2K_m^2 + 5K_m + 2) + 2b^{-6} (2K_m - K_m^2 - 1)$$

Como sólo nos interesa calcular  $C_3$ :

$$\Delta C_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & a^{-3} & \frac{m_0}{4\pi} a^{-3} \\ 0 & 1 & b^{-3} & 0 \\ 1 & -K_m & 2K_m a^{-3} & \frac{m_0}{4\pi} a^{-3} \\ 0 & -K_m & 2K_m b^{-3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta C_3 = \frac{m_0}{4\pi} (9K_m a^{-3} b^{-3}),$$

$$C_3 = \frac{\Delta C_3}{\Delta} = \frac{m_0}{4\pi} \left( \frac{9K_m a^{-3} b^{-3}}{\Delta} \right)$$

Finalmente:

$$\frac{H_3'}{H_3} = \frac{\frac{m_0}{4p}}{\frac{m_0}{4p} \left( \frac{9K_m a^{-3} b^{-3}}{\Delta} \right)} =$$

$$\frac{H_3'}{H_3} = 1 + \frac{2}{9} K_m^{-1} (K_m - 1)^2 \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right]$$

**Ejercicio:** Calcular el factor de blindaje magnético para el caso de una esfera hueca de radios a y b (a < b) de permeabilidad relativa  $K_m$ , con  $\mathbf{H}_0$  como campo externo y  $\mathbf{H}_1$  campo dentro de la parte hueca de la esfera. ( $\mathbf{H}_0/\mathbf{H}_1 = ?$ )

### 3.5 Problemas con geometría cilíndrica:

Resolveremos problemas con uniformidad axial (independientes de la coordenada z). La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_m}{\partial j^2} = 0 \quad (3.9)$$

Por propiedad de las funciones armónicas:

$$V_{m(r,j)} = f(r)g(j) \quad (3.10a)$$

Siendo la solución:

$$V_{m(r,j)} = (A_0 + C_0 \ln r)(j + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n})(\sin nj + \cos nj)$$

(3.10b)

Sí las interfases son superficies cilíndricas concéntricas:

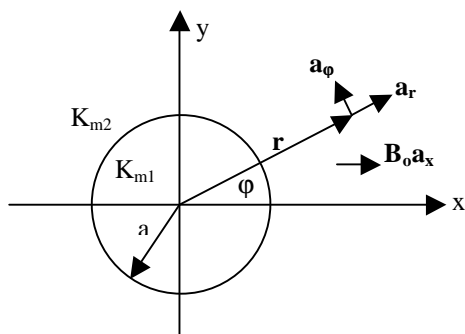
$$V_{m(r,j)} = (A_1 r + C_1 r^{-1})(\sin j + \cos j)$$

Si los ejes se eligen apropiadamente, basta con una de las dos funciones trigonométricas. Usaremos la siguiente solución para las aplicaciones:

$$V_{m(r,j)} = A_1 r \cos j + C_1 r^{-1} \cos j \quad (3.10c)$$

#### Ejemplo 3.5.1:

Sea un material magnético en forma de cilindro largo (radio "a") cuya permeabilidad magnética relativa es  $K_{m1}$ . Este material está totalmente inmerso en un medio muy extenso de permeabilidad relativa  $K_{m2}$ , en el cual existe un campo uniforme y constante  $\mathbf{B}_0 \mathbf{a}_x$ . Calcular la  $\mathbf{M}$  inducida en el cilindro.



Solución:

**Regla:** para usar la ec. (3.10)c debe orientarse la magnitud vectorial dato paralela al eje x.

Los potenciales escalares son:

$$V_{m1(r,j)} = A_1 r \cos j$$

$$V_{m2(r,j)} = A_2 r \cos j + C_2 r^{-1} \cos j$$

Nótese que  $A_2 \neq 0$  porque en  $r \rightarrow \infty$  existe un campo uniforme  $\mathbf{B}_0$ , luego calculamos  $A_2$  así:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{m2} = A_2 r \cos j = A_2 x$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B}_2 = -\mathbf{m}_0 K_{m2} \frac{\partial V_{m2}}{\partial x} \mathbf{a}_x = -\mathbf{m}_0 K_{m2} A_2 \mathbf{a}_x = B_0 \mathbf{a}_x$$

$$\therefore A_2 = -\frac{B_0}{\mathbf{m}_0 K_{m2}}$$

Calculo de  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial j} \mathbf{a}_j, \text{ así:}$$

$$\mathbf{H}_1 = -A_1 \cos j \mathbf{a}_r + A_1 \sin j \mathbf{a}_j, \mathbf{B}_1 = K_{m1} \mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{H}_2 = -\left( \frac{B_0}{\mathbf{m}_0 K_{m2}} + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos j \mathbf{a}_r + \left( -\frac{B_0}{\mathbf{m}_0 K_{m2}} + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin j \mathbf{a}_j$$

$$\mathbf{B}_2 = K_{m2} \mathbf{H}_2.$$

Las condiciones de contorno dan las ecuaciones:

$$-A_1 K_{m1} = \frac{B_0}{\mathbf{m}_0} + \frac{C_2 K_{m2}}{a^2} \quad (i)$$

$$A_1 = \frac{B_0}{\mathbf{m}_0 K_{m2}} + \frac{C_2}{a^2} \quad (ii)$$

De (i) y (ii) se obtienen  $A_1$  y  $C_2$  y la respuesta se

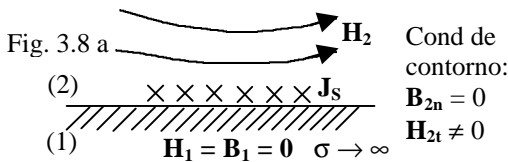
calcula con:  $\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{m}_0} - \mathbf{H}_1$ , según relación constitutiva.

$$\mathbf{M}_1 = (K_{m1} - 1) \mathbf{H}_1 = \frac{2B_0 (K_{m1} - 1)}{\mathbf{m}_0 (K_{m1} + K_{m2})} \mathbf{a}_x$$

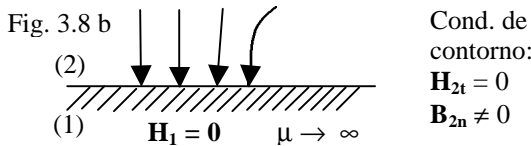
### 3.6 Conductores perfectos y ferromagnetismo ideal:

En muchos casos conviene idealizar el carácter conductor de un material ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) o el carácter ferromagnético ( $\mu \rightarrow \infty$ ), los resultados así obtenidos son una aceptable aproximación a las soluciones exactas.

1º) No existe campo magnético dentro de un conductor perfecto. Esto es  $\mathbf{H} = \mathbf{B} = 0$ . Puede existir en la superficie de dicho conductor y en consistencia con las condiciones de frontera una corriente superficial (ver capítulo 6)



2º) En todo material ferromagnético existe B; luego, para que  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  sea siempre finita  $H \rightarrow 0$  cuando  $\mu \rightarrow \infty$

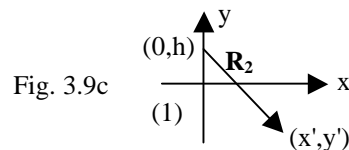
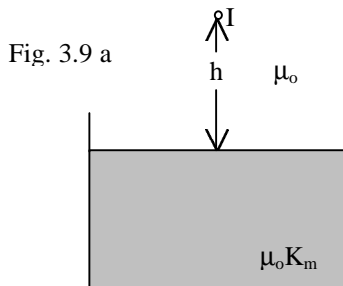


### 3.7 Método de las Imágenes:

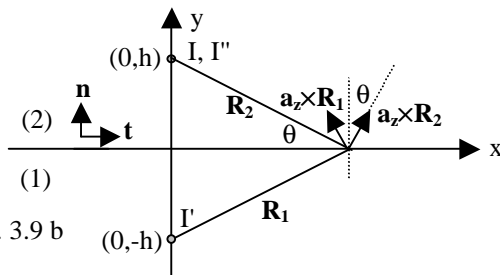
Análogo al empleado en Electrostática; el efecto de los medios materiales es tomado en cuenta usando líneas de corriente o dipolos imágenes.

#### Ejemplo 3.7.1:

Se tiene una cubeta muy grande lleno de aceite (permeabilidad relativa  $K_m$ ) a una altura  $h$  sobre la superficie libre de aquel pasa un conductor horizontal paralelo a aquella. Si el cable es muy largo y de radio despreciable, calcular el campo magnético en todos los medios cuando aquel transporta una corriente  $I$ .



**Solución:** El método consiste en reemplazar los medios materiales por un conjunto de alambres rectilíneos (imágenes) de tal manera que se cumplan las condiciones de frontera.



Notar las imágenes  $I'$ , así como las direcciones y sentidos de los campos expresados por:  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2$ .  
Solución:

a) Expresar los campos  $\mathbf{H}$  para los medios (1) y (2)

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{2p} \left( \frac{I \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} + \frac{I' \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_1}{R_2^2} \right)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{2p} \left( \frac{I'' \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right)$$

b) Expresar el campo  $\mathbf{B}$  de acuerdo al tipo de material

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2; \quad \mathbf{B}_1 = \mu_0 K_m \mathbf{H}_1$$

c) Aplicar las condiciones de contorno con los campos obtenidos de (a) y (b):

De la Fig. 3.9 b:

$$I \sin q - I' \sin q = I'' \sin q$$

$$I - I' = I'' \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$I \cos q - I' \cos q = K_m I'' \cos q$$

$$I + I' = K_m I'' \quad \dots \dots (ii)$$

De (i) y (ii):  $I' = \left( \frac{K_m - 1}{K_m + 1} \right) I$ ,  $I'' = \frac{2I}{(K_m + 1)}$

Cálculo de  $\mathbf{M}_1$ :  $\mathbf{M}_1 = (K_m - 1)\mathbf{H}_1$

$$\mathbf{M}_1 = \left( \frac{K_m - 1}{2p} \right) \left( \frac{2I}{K_m + 1} \right) \left( \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right)$$

De donde deducimos:

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}_1 \quad \mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{n}$$

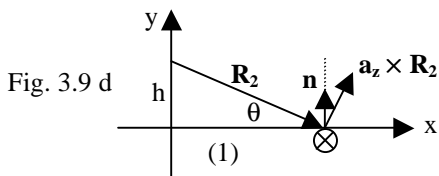
$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ -\frac{(y'-h)}{(x')^2 + (y'-h)^2} & \frac{x'}{(x')^2 + (y'-h)^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{a}_z \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{x'}{(x')^2 + (y'-h)^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{y'-h}{(x')^2 + (y'-h)^2} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{x'}{(x')^2 + (y'-h)^2} \right] = \frac{-x'^2 + (y'-h)^2}{[(x')^2 + (y'-h)^2]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{y'-h}{(x')^2 + (y'-h)^2} \right] = \frac{x'^2 - (y'-h)^2}{[(x')^2 + (y'-h)^2]^2}$$

entonces:  $\nabla \times \left( \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right) = 0 \rightarrow \mathbf{J}_M = 0$



$$\left( \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right) \times \mathbf{n} = \sin q \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{n} = \frac{(K_m - 1)}{p(K_m + 1)} \frac{I \sin q}{R_2} \mathbf{a}_z$$

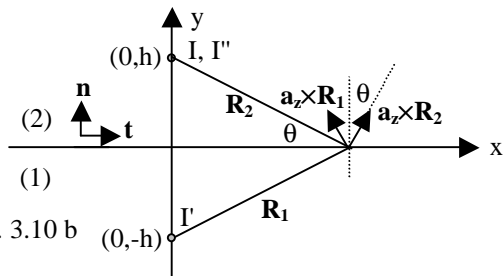
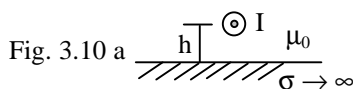
$$\sin q = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} \rightarrow I_M = \int_{x=-\infty}^{+\infty} J_{SM} dx$$

$$I_M = \frac{(K_m - 1)I}{p(K_m + 1)} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{(h^2 + x^2)} dx = \frac{(K_m - 1)I}{(K_m + 1)}$$

conclusión:  $I' = I_M$

**Ejemplo 3.7.2:**

Hallar los campos en todas partes debidas al conductor unifilar de la fig 3.10a frente a un conductor perfecto muy extenso.



$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{2p} \left( \frac{I \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} + \frac{I' \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_1}{R_2^2} \right)$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{2p} \left( \frac{I'' \mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2} \right)$$

Como  $\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$  son nulos, debe ser:  $I'' = 0$ ,

$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$  y existe  $\mathbf{J}_s$  en  $y = 0$

$m_0 \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$  con  $R_1 = R_2$

$m_0 (I \cos q + I' \cos q) = 0 \rightarrow I' = -I$

condiciones de contorno:  $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$  en

$y = 0$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \frac{I}{2p} \left[ \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_1^2} - \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_1}{R_2^2} \right]$$

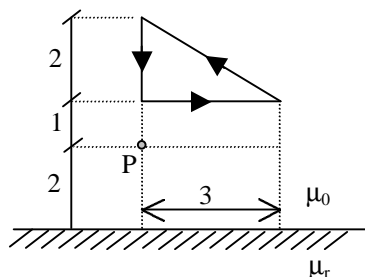
$$\mathbf{J}_s = \frac{I}{2pR_2} (-\sin q - \sin q) \mathbf{a}_z = -\frac{I \sin q}{p R_2} \mathbf{a}_z$$

como en el ejemplo 3.7.1:  $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} J_s dx = -I$

Nótese que una corriente dc induce otra corriente en un conductor perfecto. Cuando  $\sigma$  es finita, para lograr esta inducción se requiere una corriente ac.

**Ejemplo 3.7.3:**

Cerca de la superficie plana de una plancha de acero ( $\mu_r \rightarrow \infty$ ) se sitúa en el aire un marco triangular, por el cual circula una corriente  $I = 2A$ . Las dimensiones están en cm. Hallar  $\mathbf{B}$  en el punto P.



Solución. Primero resolvemos:

$$\begin{matrix} (2) & h & \odot I & \mu_0 \\ \hline (1) & & & \mu \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \text{Ver Fig. 3.9 b}$$

Según 3.7.1:  $I' = \left( \frac{K_m - 1}{K_m + 1} \right) I, \quad I'' = \frac{2I}{(K_m + 1)}$

Cuando  $K_m \rightarrow \infty$  tenemos:

$$I' = I, \quad I'' = 0 \rightarrow \mathbf{H}_1 = 0$$

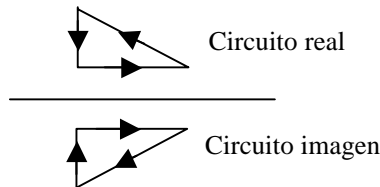
Pero  $\mathbf{B}_1 \neq 0$ , siendo

$$\mathbf{B}_1 = \frac{m_0 K_m}{2p} \left( \frac{2I}{K_m + 1} \right) \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2}$$

$$\lim_{K_m \rightarrow \infty} \mathbf{B}_1 = \frac{m_0 I}{p} \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{R}_2}{R_2^2}$$

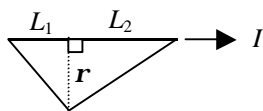
Nótese el cumplimiento de la ec. (ii)

De aquí deducimos que en el acero existe un circuito imagen:



El cálculo pedido se hace con la fórmula del ejemplo 1.3:

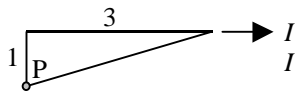
$$\mathbf{B} = \frac{m_0 I}{4pr} \left[ \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + r^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + r^2}} \right]$$



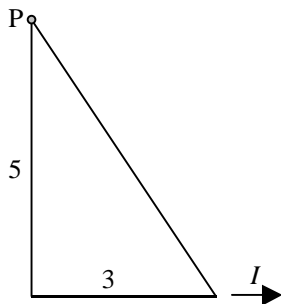
Los tramos verticales no contribuyen a  $\mathbf{B}$ .

Los tramos horizontales pueden calcularse así:

a) circuito real:



b) circuito imagen:



Cto. real:  $L_1 = 3\text{cm}$ ,  $L_2 = 0$ ,  $r = 1\text{cm}$

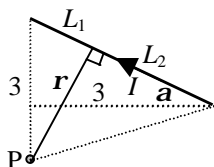
$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{1}{10^{-2}} \left( \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right)$$

Cto. imagen:  $L_1 = 3\text{cm}$ ,  $L_2 = 0$ ,  $r = 5\text{cm}$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{1}{5 \times 10^{-2}} \left( \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \right)$$

Los tramos inclinados pueden calcularse así:

a) circuito real:



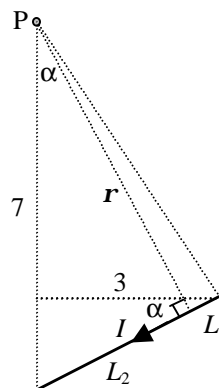
$$\mathbf{a} = \tan^{-1} \frac{2}{3} = 33.6^\circ$$

$$\mathbf{r} = 3 \cos \mathbf{a} = 2.5\text{cm}$$

$$L_1 = 3 \sin \mathbf{a} = 1.66\text{cm}$$

$$L_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} - 1.66 = 3.61 - 1.66 = 1.95\text{cm}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{1}{2.5 \times 10^{-2}} \left( \frac{1.66}{\sqrt{1.66^2 + 2.5^2}} + \frac{1.95}{\sqrt{1.95^2 + 2.5^2}} \right)$$



$$\mathbf{a} = \tan^{-1} \frac{2}{3} = 33.6^\circ$$

$$\mathbf{r} = 7 \cos \mathbf{a} = 5.83\text{cm}$$

$$L_2 = 7 \sin \mathbf{a} = 3.87\text{cm}$$

$$L_1 = 3.61 - 3.87 = -0.26\text{cm}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{1}{5.83 \times 10^{-2}} \left( \frac{-0.26}{\sqrt{0.26^2 + 5.83^2}} + \frac{3.87}{\sqrt{3.87^2 + 5.83^2}} \right)$$

Campo total:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) (-0.949 + 0.103 + 0.467 - 0.087) \times 10^2$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_z (0.932) \times 10^{-5} \text{T (aprox. 0.1G)}$$